

Taller Colaborativo 3  
“FUNCIONES EXPONENCIAL, LOGARITMICA  
Y SINUSOIDAL”

Puntaje:	Nota Taller:
----------	--------------

EQUIPO DE TRABAJO: (ESCRIBIR NOMBRES POR APELLIDO EN ORDEN ALFABÉTICO)

Nombre	Rut	Sección
1.		
2.		
3.		
4.		
5.		

Logros de aprendizaje:

- Comprender la importancia de los modelos exponenciales, logísticos y sinusoidales.
- Entender la teoría elemental asociada a los modelos exponenciales, logísticos y sinusoidales.
- Aplicar los modelos estudiados en contexto a través de la interpretación de gráficos y datos.

Contenidos:

- Función Exponencial y Logarítmica
- Función Sinusoidal
- Modelos de Crecimiento y Decaimiento Exponencial
- Modelo Logístico
- Modelo Sinusoidal

**ITEM I: Investigación**

La meta de este ítem es mostrar la importancia de los modelos estudiados en clases. Para esto se les pide investigar en algunos temas sin demasiada rigurosidad, debido a que pueden encontrarse con bibliografía muy avanzada. Está permitido el uso de páginas de internet sobre divulgación científica, libros y artículos.

1. [6 puntos]

- a) [2 puntos] Explique en sus palabras la diferencia del modelo exponencial y el modelo logístico en el contexto de modelamiento de poblaciones.
- b) [4 puntos] Investigue una situación en la que se haya usado un modelo logístico para modelar el crecimiento de una población. Fundamente su respuesta usando bibliografía adecuada. Utilice citas en formato APA.

2. [6 puntos]

- a) [2 puntos] Investigue y explique en sus palabras la *Transformada de Fourier Rápida* (FFT por su sigla en inglés) y explique su relación con el modelo sinusoidal. (Hint: Puede ser de utilidad la expresión matemática  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ , es decir,  $e^{ix}$  es una combinación de funciones sinusoidales)
- b) [4 puntos] Explique en sus palabras el uso de FFT en el procesamiento de imágenes en el contexto médico. Fundamente su respuesta usando bibliografía adecuada. Utilice citas en formato APA.

**ÍTEM II: Teoría Elemental**

En este ítem la meta será evaluar sus conocimientos acerca de los modelos exponenciales y sinusoidales a través del estudio de propiedades intrínsecas de estos modelos.

**II.1: Modelos Exponenciales**

1. [4 puntos] Los modelos exponenciales son conocidos entre otras cosas por su gran utilidad en el contexto de ecuaciones diferenciales. Determine un modelo exponencial  $f$  tal que

$$f'(t) - 6f(t) + 9f(t) = 0 \text{ y } f(\ln(2)) = 16 .$$

2. [4 puntos] La oración “la razón de cambio de la población es proporcional a la población” se ve inofensiva, sin embargo se puede probar que describe con toda precisión al modelo exponencial, esto es, el único modelo  $P(t)$  tal que  $P'(t) = c P(t)$  es el modelo exponencial.

El modelo logístico en cambio puede entenderse como una sofisticación del modelo exponencial, pues satisface que “la razón de cambio de la población es igual a la población actual multiplicada por una constante que depende de la población”, esto es, si  $P(t)$  es un modelo logístico, existe una función  $f$  tal que

$$P'(t) = f(P)P(t) .$$

Compruebe que si  $P(t) = \frac{ac}{bc + e^{-at}}$ , entonces  $f(P) = a - bP$  e interprete el resultado.

II.2: Modelos Sinusoidales

1. [8 puntos] Los modelos sinusoidales son también conocidos entre otras cosas por sus aplicaciones en ecuaciones diferenciales. Dado que los modelos sinusoidales oscilan, se puede comprobar que son los candidatos naturales para modelar resortes entre otras cosas.
- a) [4 puntos] La ley de Hooke junto a la segunda ley de Newton implican que una objeto de masa  $m$  amarrado a un resorte describe una trayectoria  $f(t)$  (ver figura) tal que

$$mf''(t) + kf(t) = 0 ,$$

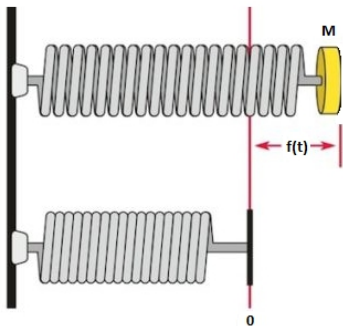
donde  $k$  es una constante positiva que depende del resorte y  $t$  es el tiempo. Determine constantes  $A$ ,  $w$  y  $p$  tales que  $f(t) = A \cos(wt - p)$  satisface tanto la ecuación anterior como las condiciones iniciales

$$f(0) = 2 \text{ y } f'(0) = 0.$$

- b) [4 puntos] Cuando además se considera una amortiguación no demasiado fuerte (como la resistencia del aire por ejemplo) se puede probar que: ¡El modelo natural resulta ser una combinación entre un modelo sinusoidal y un modelo exponencial! Este modelo suele tener la forma

$$f(t) = Ae^{-ct}\cos(wt - p) ,$$

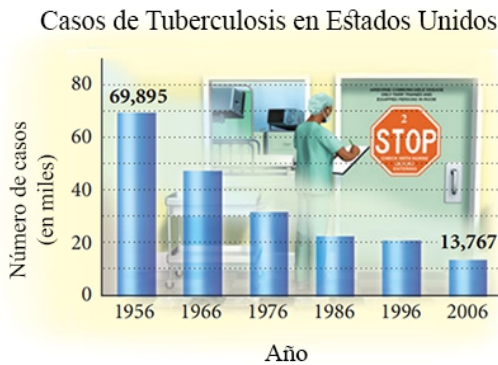
donde  $c$  es una constante positiva.  
Calcule el límite de  $f(t)$  cuando  $t \rightarrow \infty$  y argumente por qué es que tiene sentido decir que la amplitud de  $f(t)$  varía en el tiempo. Finalmente use lo anterior para argumentar por qué es que es buena idea modelar un resorte amortiguado con esta función.



ÍTEM III: Aplicaciones

En este ítem se estudiarán aplicaciones de los modelos exponenciales, logísticos y sinusoidales en contexto, a través de gráficas y datos.

1. [4 puntos] El número de casos de Tuberculosis de Estados Unidos ha disminuido continuamente desde 1956 como muestra el siguiente gráfico:



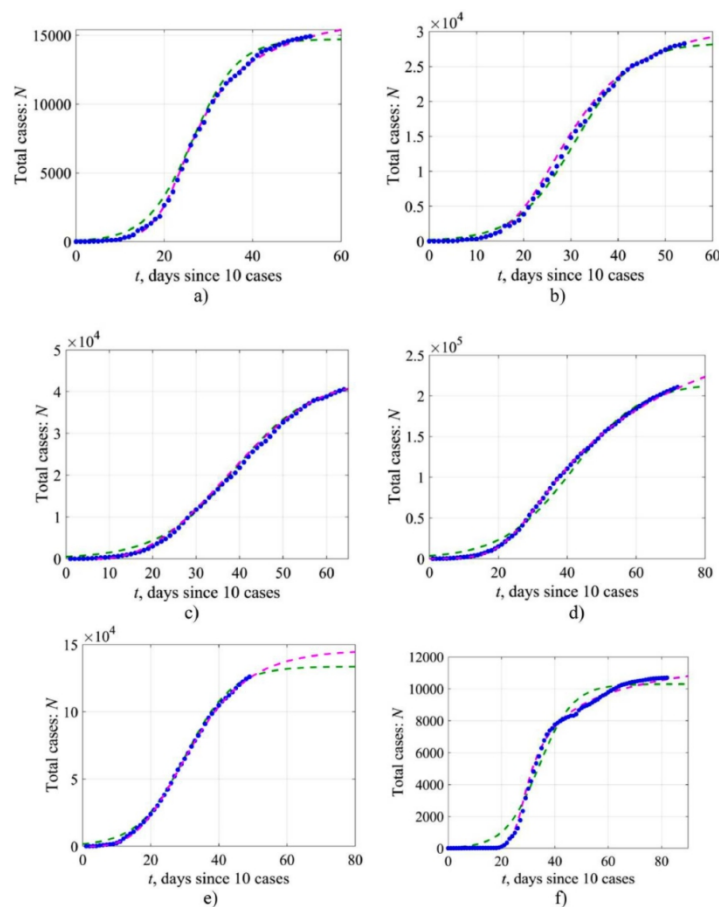
- a) [2 puntos] Modele la información dada a través de un modelo exponencial.
- b) [1 punto] Use el modelo determinado en la parte anterior para estimar la cantidad de enfermos por Tuberculosis el año 2021.
- c) [1 punto] Use el modelo anterior para determinar desde qué año habrán menos de 1000 casos.

2. [5 puntos] La semivida de un fármaco en la sangre es el tiempo que tarda en eliminarse en promedio la mitad de la concentración plasmática alcanzada por una dosis del mismo. Para las siguientes preguntas asuma que la concentración después de un tiempo  $t$  responde a un modelo de decaimiento exponencial, es decir,

$$C(t) = C_0 e^{-kt}.$$

- a) [2 puntos] Determine una fórmula para calcular la semivida de cualquier fármaco en la sangre que dependa de los parámetros del modelo de decaimiento exponencial. ¿Por qué la fórmula no depende de  $C_0$ ?
- b) [3 puntos] Algunos antidepresivos provocan efectos secundarios al dejar de ser consumidos. Esto es conocido como Síndrome de Descontinuación y típicamente comienza cuando 90% de la dosis ha dejado el sistema. La fluoxetina es un antidepresivo común con una vida media de 5 días. Estime la cantidad de tiempo necesaria para que aparezca el Síndrome de Descontinuación desde que la Fluoxetina fue consumido por última vez.

3. [7 puntos] La cantidad de personas enfermas por Covid en los países Austria (a), Suiza (b), Países Bajos (c), Italia (d), Turquía (e) y Corea del Sur (f),  $t$  días después de confirmar 10 casos está graficada con puntos azules, mientras que la curva verde muestra un modelo logístico simple (ver [publicación completa](#)).

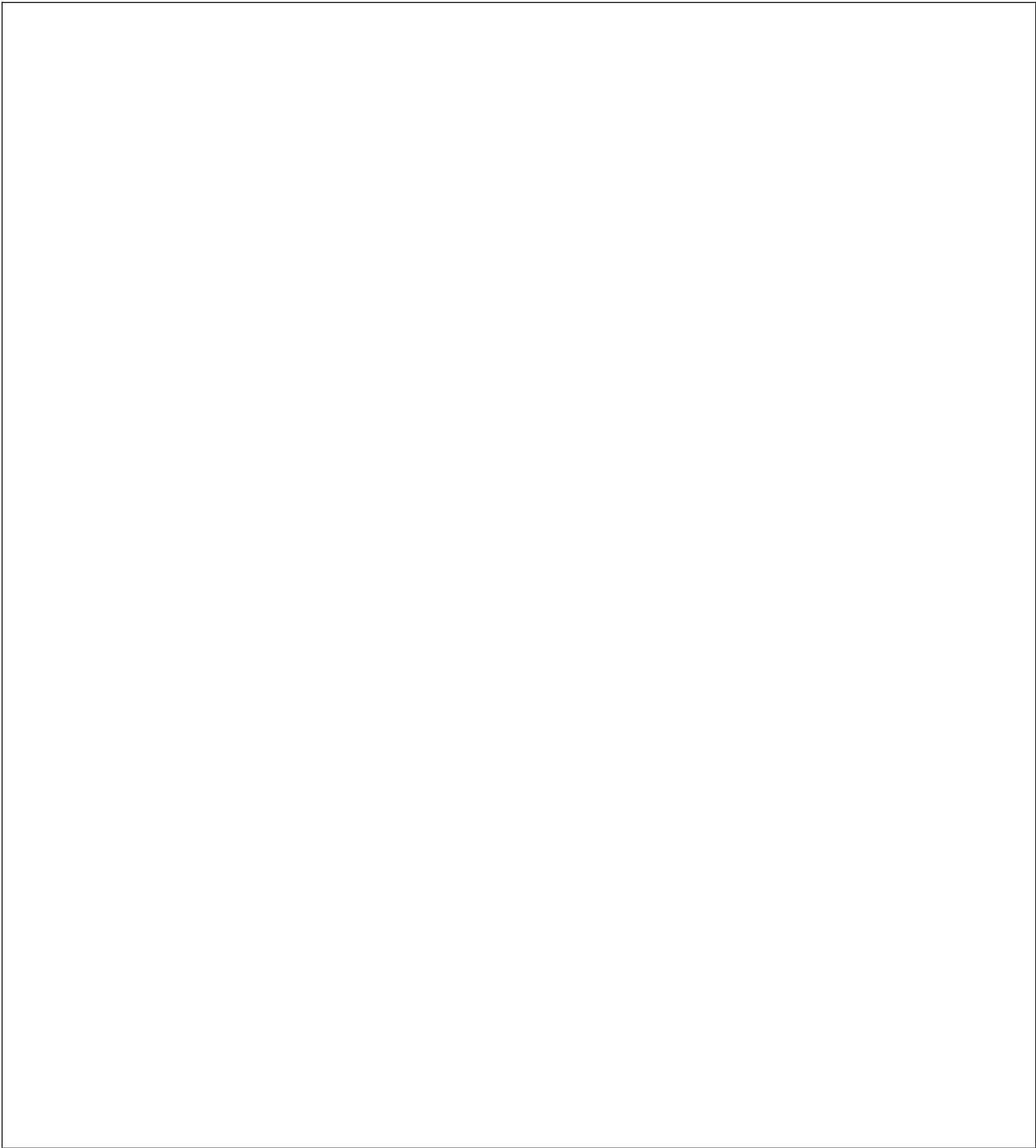


Asuma que en Turquía la cantidad de personas enfermas a los 20 días era de 25000 y recuerde que en el día 0 hay exactamente 10 contagiados.

- a) [2 puntos] Determine un modelo exponencial que se ajuste a los datos de Turquía dados.
- b) [3 puntos] Ahora asuma además que a los 40 días hubieron 100000 contagiados y determine un modelo logístico que se ajuste a los datos de Turquía dados.
- c) [2 puntos] Estime usando ambos modelos la cantidad de contagiados que se supondría que habrían a los 80 días y use la gráfica para determinar qué modelo es más acertivo.

4. [8 puntos] En un ecosistema de Presa-Depredador, el número de depredadores y el número de presas tiende a variar periódicamente. En cierta región con coyotes como depredadores y conejos como presas, la población de conejos es  $R(t) = 1000 + 150\sin(2t)$  y el número de coyotes es  $C(t) = 200 + 50\cos(2t - 3\pi/2)$ , donde  $t$  está medido en años a partir de 1996.

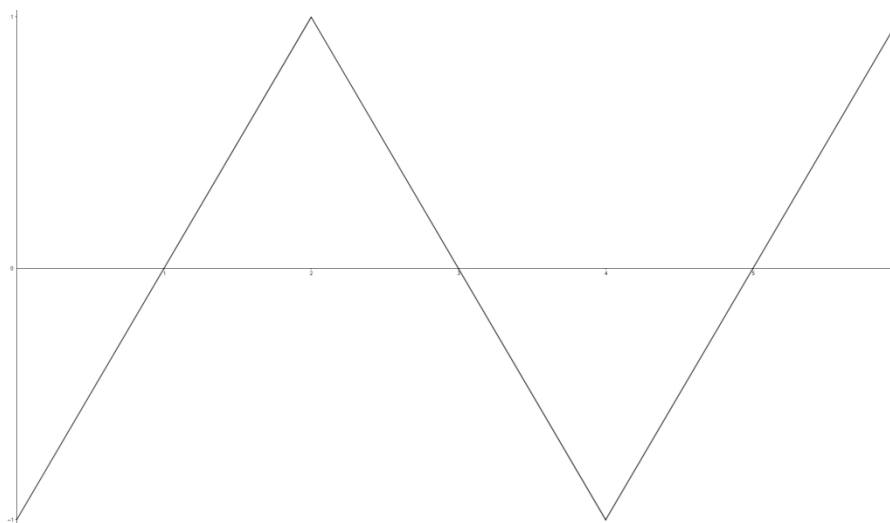
- a) [1 punto] Determine el máximo de conejos y coyotes posibles en este sistema.
- b) [1 punto] Determine el año exacto en el cual la cantidad de conejos y coyotes es máxima (cada una por su parte) por primera vez.
- c) [4 puntos] Pruebe que la razón de cambio de la cantidad de conejos es proporcional a la razón de cambio de la cantidad de coyotes salvo por el signo, es decir, la razón de cambio de  $R(t)$  es una constante negativa multiplicada por la razón de cambio de  $C(t)$ . Interprete el resultado.
- d) [2 puntos] Grafique  $R(t)$  y  $C(t)$  en una misma gráfica e interprete en el contexto del problema.





5. [8 puntos] Un electrocardiograma entrega una visualización de la actividad eléctrica del corazón a través de gráficas que a simple vista uno describiría como ondas. Una investigación un poco más minuciosa nos hará darnos cuenta que la visualización entrega ondas no necesariamente periódicas y extremadamente puntiagudas, por lo que uno estaría tentado a decir que esas gráficas no pueden provenir de funciones sinusoidales. Este argumento, aunque razonable, está muy errado. Es un hecho matemático que cualquier señal razonable puede ser escrita como una suma de funciones sinusoidales. En este ejercicio veremos como es que una onda triangular no es más que una suma de funciones sinusoidales apropiadas.

Considere la función triangular  $f(t)$  dada por



( $f$  es una función formada por trozos de recta y tal que  $f(0) = -1, f(2) = 1, f(4) = -1$ , etc). Considere además la familia de funciones

$$f_n(x) = -\frac{8}{(2n-1)^2\pi^2} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2}\right),$$

definida para  $n = 1, 2, 3, \dots$

- [2 puntos] Calcule  $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$  y  $F(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$ .
- [2 puntos] Argumente por qué  $F(x)$  y  $f(x)$  tienen el mismo periodo.
- [2 puntos] Estime la diferencia entre  $F(x)$  y  $f(x)$  para al menos tres valores, es decir, calcule  $|F(x) - f(x)|$  para al menos tres valores de  $x$ . (Sugerencia: Use  $x = 0, 1$  y  $2$ )
- [2 puntos] Grafique  $F(x)$  y  $f(x)$  en el intervalo  $x \in (0, 4)$  en un mismo gráfico usando un software a su elección. (Sugerencia: Use Geogebra)

Como habrá notado,  $F(x)$  no es precisamente  $f(x)$ , sin embargo eso se debe a que no hemos tomado suficientes funciones  $f_n$ . Aunque puede sonar un poco decepcionante, para lograr la igualdad necesitamos nada más ni nada menos que infinitos  $f_n$ , sin embargo en la práctica basta con tomar unos pocos para encontrar una excelente aproximación. En el siguiente [link](#) puede encontrar lo que pasa cuando se suman hasta las primeras 20 funciones, logrando así una aproximación muy precisa.

